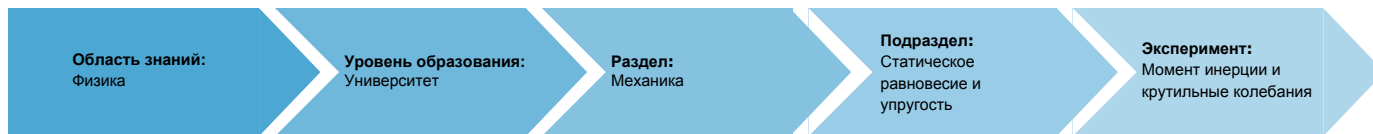


# Момент инерции и крутильные колебания (Item No.: P2133100)

## Актуальность учебной программы



### Сложность



Сложно

### Время подготовки



10 минут

### Время выполнения



20 минут

### Рекомендуемый размер группы



1 студент

### Дополнительно требуется:

### Варианты эксперимента:

#### Ключевые слова:

Абсолютно твердое тело, момент инерции, ось вращения, крутильные колебания, жесткость пружины, угловой коэффициент упругости, момент инерции шара, момент инерции диска, момент инерции цилиндра, момент инерции стержня, момент инерции двух материальных точек.

## Краткое описание

### Принцип

Различные тела совершают крутильные колебания вокруг оси, проходящей через центр тяжести. Измеряя период колебания, можно вычислить момент инерции тела.



Рис. 1: Экспериментальная установка для определения момента инерции различных тел.

## Оборудование


№ п/п	Материалы	Номер артикля	Количество
1	Вращающийся вал	02415-01	1
2	Сфера	02415-02	1
3	Диск	02415-03	1
4	Полый цилиндр	02415-04	1
5	Сплошной цилиндр	02415-05	1
6	Стержень с подвижными грузами	02415-06	1
7	Пружинный динамометр, 2,5 Н	03060-02	1
8	Световой барьер со счетчиком	11207-30	1
9	Источник питания 5 В пост. ток / 2,4 А	11077-99	1
10	Треножник -PASS- PHYWE	02002-55	1
11	Цилиндрическая опора -PASS- PHYWE	02004-55	1

## Задания

Определите:

- Момент импульса спиральной пружины.
- Момент инерции:
  - диска, двух цилиндров, шара и стержня;
  - двух материальных точек (зависимость момента инерции от расстояния до оси вращения).  
Центр силы тяжести лежит на оси вращения.

## Установка и порядок выполнения работы

Соберите установку как показано на рис. 1. Для определения углового момента силы упругости закрепите стержень во вращающемся валу, а две гирьки расположите симметрично относительно оси вращения. Стержень поворачивается на  $180^\circ$  вокруг оси. Измерьте силу при помощи динамометра. При измерении динамометр должен находиться под прямым углом к плечу рычага. Для измерения периода колебаний на тело прикрепите листок бумаги (ширина  $\leq 3$  мм). Разместите тело так, чтобы листок находился точно под световым барьером. Для светового барьера выберите режим . Отклоните тело на  $180^\circ$ .

Измерьте время полупериода для каждого случая, усреднив значения измерений. Исходя из требований к безопасности и устойчивости, не рекомендуется закручивать пружину на  $\pm 720^\circ$ .

## Теория и оценка результатов

Соотношение между моментом импульса  $\vec{L}$  твердого тела в стационарной системе координат с ее началом в центре тяжести, и моментом  $T$ , действующем на него, определяется как:

$$\vec{T} = \frac{d}{dt} \vec{L} \quad (1)$$

Момент импульса выражается через угловую скорость  $\vec{\omega}$  и тензор моментов инерции  $\hat{I}$

$$\vec{L} = \hat{I} \otimes \vec{\omega}$$

т.е. сокращение тензора с вектором. В данном случае угловая скорость  $\vec{\omega}$  направлена в сторону основной оси инерции (оси z), поэтому у  $\vec{L}$  только одна составляющая:

$$L_Z = I_Z \cdot \omega$$

где  $I_Z$  - составляющая основного тензора момента инерции тела. Для данного случая уравнение (1) имеет вид:

$$T_Z = I_Z \frac{d\omega}{dt} = I_Z \frac{d^2\Phi}{dt^2}$$

где  $\Phi$  - угол вращения.

В области действия закона Гука момент силы спиральной пружины равен:

$$T_Z = -D \cdot \Phi \quad (2)$$

где  $D$  - угловой коэффициент упругости.

Из графика зависимости на рис. 2

$$Y = A + B \cdot X$$

находим тангенс угла наклона

$$B = 0.0265 \text{ Нм / рад} \quad (\text{см. (2)})$$

Угловой коэффициент упругости равен:

$$D = 0.0265 \text{ Нм / рад}$$

Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{D}{I_Z} \Phi = 0$$

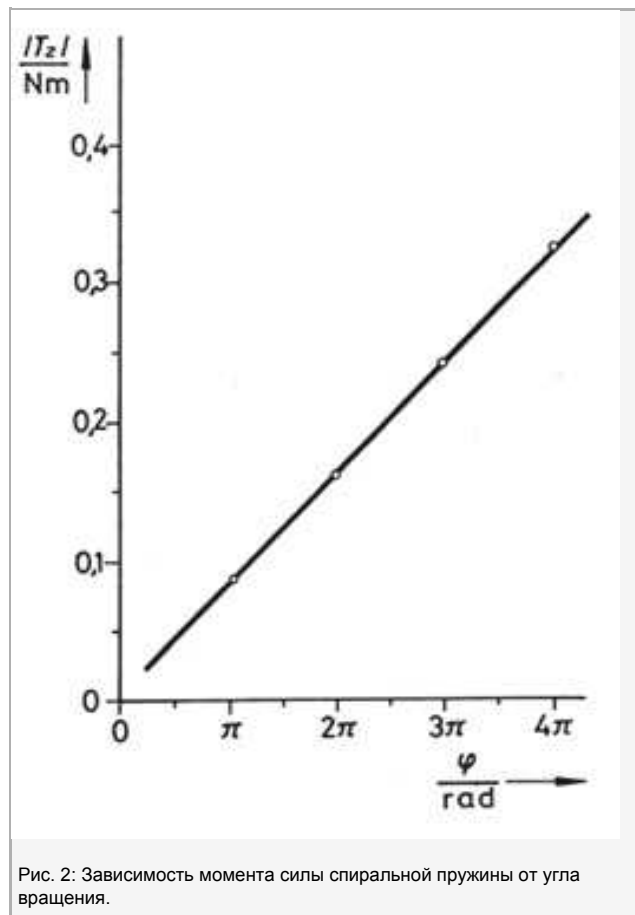
Период и частота колебаний соответственно равны

$$T = 2\pi \sqrt{I_Z / D} \quad (3)$$

$$f = \frac{1}{2} \pi \sqrt{D / I_Z}$$

Если  $\rho(x, y, z)$  - плотность тела, то момент инерции  $I_Z$  находится как :

$$I_Z = \iiint (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$



Для сферы с радиусом  
 $r = 0.070 \text{ м}$   
 и массой  $m = 0.761 \text{ кг}$ ,  
 $I_Z = \frac{2}{5} m r^2 = 1.49 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$

Экспериментальное значение

$$I_Z = 1.48 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$$

Для диска с радиусом  
 $r = 0.108 \text{ м}$   
 и массой  $m = 0.284 \text{ кг}$ ,  
 $I_Z = \frac{1}{2} m r^2 = 1.66 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$

Экспериментальное значение

$$I_Z = 1.68 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$$

Для сплошного цилиндра с радиусом  
 $r = 0.0495 \text{ м}$   
 и массой  $m = 0.367 \text{ кг}$ ,  
 $I_Z = \frac{1}{2} m r^2 = 0.45 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$

Экспериментальное значение

$$I_Z = 0.44 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$$

Для полого цилиндра с двумя радиусами  
 $r_i = 0.070 \text{ м}$   
 $r_a = 0.050$   
 и массой  $m = 0.372 \text{ кг}$ ,  
 $I_Z = \frac{1}{2} m (r_i^2 + r_a^2) = 0.86 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$

Экспериментальное значение

$$I_Z = 0.81 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$$

Для тонкого стержня длиной

$$l = 0.6 \text{ м}$$

и массой  $m = 0.133 \text{ кг}$ ,

$$I_Z = \frac{1}{12}ml^2 = 3.99 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$$

Экспериментальное значение

$$I_Z = 3.98 \cdot 10^{-3} \text{ кг м}^2$$

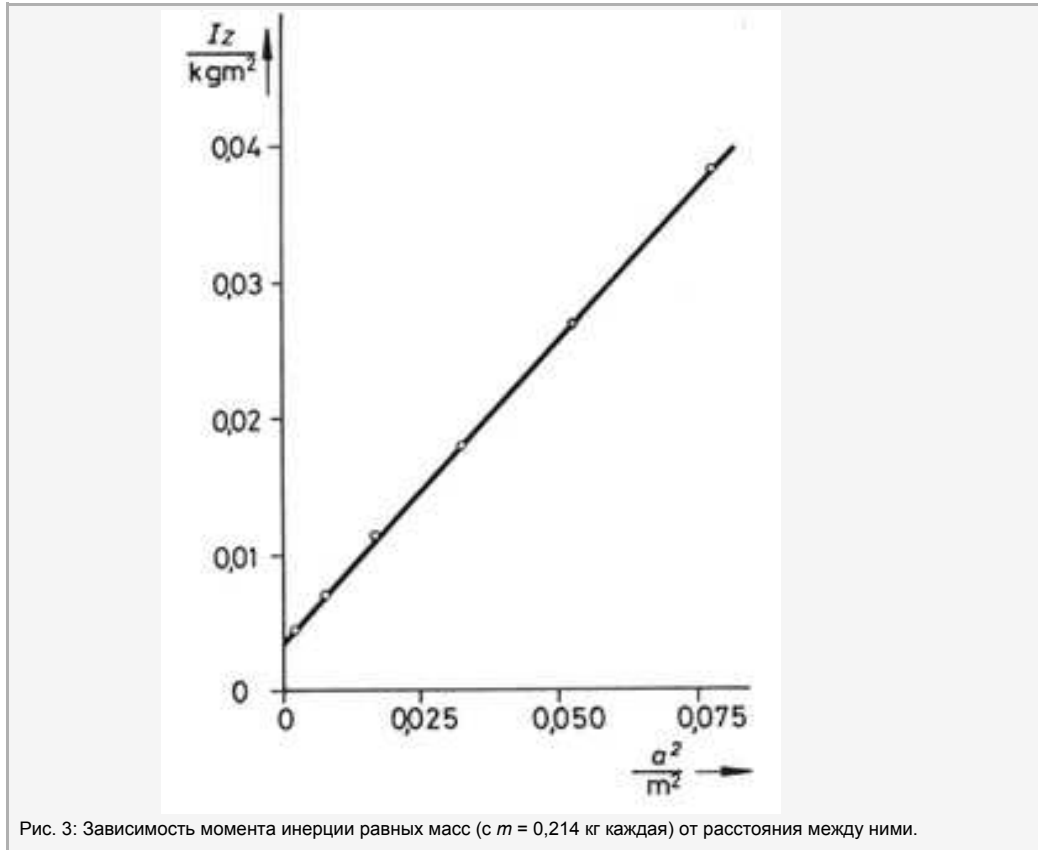


Рис. 3: Зависимость момента инерции равных масс (с  $m = 0,214 \text{ кг}$  каждая) от расстояния между ними.

Для материальной точки с массой  $m$  на расстоянии  $a$  от оси вращения получаем:

$$I_Z = ma^2 \quad (4)$$

Из графика зависимости на рис. 3

$$Y = A + BX^2 \quad (\text{см.}(4))$$

находим тангенс угла наклона

$$B = 0.441 \text{ кг}$$

и пересечение с осью

$$A = 0.0043 \text{ кг/м}^2$$