Модуль упругости / модуль Юнга (Item No.: P2120200)

Актуальность учебной программы

Область знаний: Физика → **Уровень образования:** Университет → **Раздел:** Механика → **Подраздел:** Статическое равно- весие и упругость → **Эксперимент:** Модуль упругости / модуль Юнга

Сложность	Время подготовки	Время выполнения	Рекомендуемый размер группы
Легко	1 час	1 час	2 студента

Дополнительно требуется:

Варианты эксперимента:

Ключевые слова:

Модуль Юнга, модуль упругости, напряжение, деформация, коэффициент Пуассона, закон Гука

Обзор

Краткое описание

Плоский стержень имеет 2 точки опоры. Он прогибается под действием силы, приложенной в центре.
Модуль упругости определяется из прогиба и геометрических размеров стержня.

Рис. 1: Экспериментальная установка для определения модуля упругости.

Оборудование

№ п/п	Материалы	Номер артикля	Количество
1	Индикатор часового типа, 10/ 0,01 мм	03013-00	1
2	Держатель для индикатора часового типа	03013-01	1
3	Плоские стержни, набор	17570-00	1
4	Хомут с резцом	03015-00	1
5	Болт с резцом	02049-00	2
6	Держатель для стальных гирь с отверстиями	02204-00	1
7	Динамометр, 1 Н	03060-01	1
8	Треножник PHYWE	02002-55	2
9	Штативный стержень, l = 250 мм, d = 10 мм	02031-00	2
10	Штативный стержень, нерж.сталь, 750 мм	02033-00	1
11	Прямоугольный зажим	02054-00	5
12	Гиря с прорезью, 10 г, черная	02205-01	10
13	Гиря с прорезью, 50 г, черная	02206-01	6
14	Штангенциркуль с нониусом, 0-160 мм, 1/20	03010-00	1
15	Рулетка, l=2 м	09936-00	1
16	Леска, d=0,5 мм, l=100 м	02090-00	1

Задания

1. Построить характеристическую кривую индикатора часового типа
2. Определить зависимость прогиба стержня от
   - силы
   - толщины при постоянной силе
   - ширины, при постоянной силе
   - расстояния между точками опоры при постоянной силе
3. Определить модуль упругости стали, алюминия и латуни.

Установка и порядок выполнения

Соберите установку как показано на рис. 1. Индикатор цифрового типа закрепляется на хомуте с резцом. Плоские стержни должны располагаться точно на двух поддерживающих резцах, имеющих возможность перемещения в направлениях x и y. Геометрические параметры установки и стержней следует записывать несколько раз или в различных позициях.
Прежде всего, следует построить характеристическую кривую индикатора часового механизма, так как он имеет возвращающую силу, которая по закону Гука пропорциональна деформации (***Ff ~ s),***

Результирующая сила ***Fr*** индикатора состоит из:

$$F_r = F_h + F_f$$

где

F_h = сила трения покоя (const)

F_f = возвращающая сила ($F \sim s$)

Поскольку сила трения покоя всегда направлена против движения, то в ходе выполнения эксперимента и при построении кривой следует определить направление силы.

Если вручную поднять (зонд в незагруженном состоянии) и медленно опустить плунжер, то результирующая сила ***Fr*** равна:

$$F_r = F_f - F_h$$

Характеристическая кривая индикатора часового типа:

Динамометр и плунжер индикатора установлены таким образом, что индикатор часового типа показывает полный прогиб.
Благодаря уменьшению силы натяжения на динамометр действует сила в соответствии с указанными выше условиями.
Используя динамометр, постройте характеристическую кривую индикатора часового типа.
Во время эксперимента силы должны быть скорректированы соответствующим образом.
В ходе эксперимента установите направление действия сил, а затем рассчитайте результирующую силу ***Fr***.

Таким образом, эффективная сила представляет собой сумму веса дополнительных масс и результирующей силы индикатора часового типа.

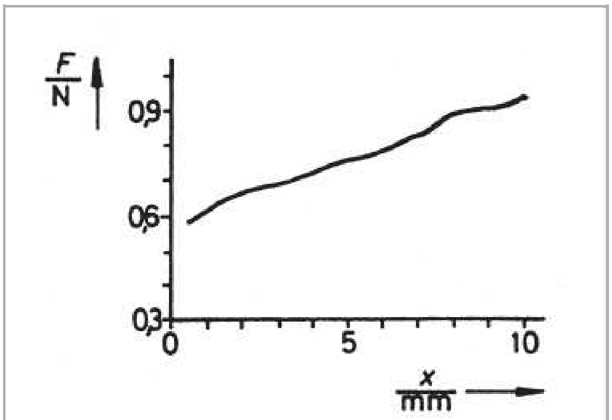

Рис. 2: Характеристическая кривая индикатора часового типа

Теория и расчет

Если тело рассматривать как однородное, то $\vec{r}_0$ или $\vec{r}$ определяют вектор ***P*** соответственно для малых векторов перемещения в недеформированном и деформированном состоянии:

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 \equiv (u_1, u_2, u_3)$$

тогда тензор деформации $\hat{d}$ равен:

$$d_{\text{ik}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

Силы $d\vec{F}$, действующие на элементарный объем тела, грани которого пересекаются параллельно координатным поверхностями, описываются тензором напряжения $\hat{\tau}$.

Это распределяет напряжение $\vec{p}$ по каждому элементарному объему тела dA определяемое единичным вектором $\vec{e}$ к направлению к вектору нормали:

$$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{\mathrm{dA}}$$

$$\vec{p} = \vec{e} \odot \vec{\tau}$$

Из закона Гука получаем зависимость между $\hat{d}$ и $\hat{\tau}$:

$$\tau_{\mathrm{ik}} = \sum\nolimits_{\mathrm{I,m}} c_{\mathrm{ik}}^{l,m} d_{\mathrm{lm}}$$

Тензор $\hat{c}$ симметричен в упругом теле, поэтому из 81 компонента остается только 21. В изотропном теле это число уменьшается до 2, т.е. модуль упругости *E* и либо модуль сдвига *G*, либо коэффициент Пуассона *μ*:

$$\tau_{11} = \frac{E}{1+\mu}(d_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu}(d_{11} + d_{22} + d_{33}))$$
$$\tau_{12} = Gd_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1+\mu} \cdot d_{12} \quad (1)$$

и аналогично для $\tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{13}, \tau_{23}$

Если сила действует в одном направлении, то

$$\tau_{22} = \tau_{33} = 0$$

Таким образом, получаем

$$\tau_{11} = E \cdot d_{11}$$

Стержень высотой *b* и широтой *a*, имеющий 2 точки опоры на концах на расстоянии *L*, на который в центре действует сила F_y, ведет себя так же как стержень с точками опоры посередине, на концы которого действует сила $F_y/2$ в противоположном направлении.
Чтобы выразить зависимость прогиба λ от модуля упругости ***E***, сначала следует определить элементарный объем:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d} \cdot a \cdot b$$

верхний слой которого укорачивается при изгибе, а нижний слой удлиняется.
Длина центрального слоя остается неизменной (нейтральное волокно).

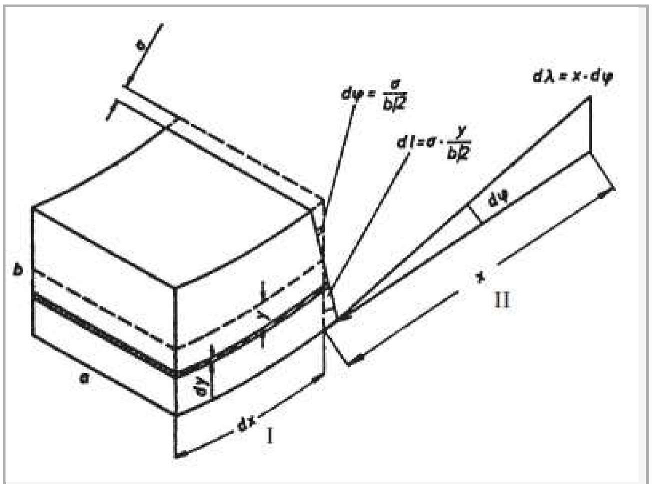

Рис. 3: Деформация стержня.

На рис. 3. указателями I и II обозначены стороны до и после деформации.

Используя обозначения, приведенные на рис. 3, получаем:

$$\mathrm{d}\lambda = x \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{2\sigma x}{b}$$

Сила упругости $\mathrm{d}F_x$, вызывающая удлинение d*l*, согласно выражению (1), равна

$$\frac{\mathrm{dF}_x}{\mathrm{ds}} = E\frac{\mathrm{dl}}{\mathrm{dx}}$$

где $ds = a \cdot dy$- площадь повернутого слоя.

Сила вызывает вращающий момент:

$$\mathrm{d}T_z = y\mathrm{d}F_x = \frac{2Ea\sigma}{b \cdot \mathrm{dx}} y^2 \mathrm{d}y$$

Сумма вращающих моментов, вызванных силами упругости, должна равняться моменту, вызванному внешней силой $F_y/2$.

$$\frac{Ea\sigma b^{2}}{6\mathrm{d}x} = \frac{F_y}{2} \cdot x$$

из которого мы получаем

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{6F_y x^2}{\mathrm{Eab}^3}\mathrm{d}x$$

Проинтегрировав выражение, получаем выражение для общего прогиба:

$$\lambda = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{L}{B}\right)^3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{F_y}{E}.$$

Таблица 1: Модуль упругости различных материалов

Материал	Размеры (мм)	$E\left(H \cdot м^{-2}\right)$
Сталь	10 x 1,5	$2{,}059 \cdot 10^{11}$
Сталь	10 x 2	$2{,}063 \cdot 10^{11}$
Сталь	10 x 3	$2{,}171 \cdot 10^{11}$
Сталь	15 x 1,5	$2{,}204 \cdot 10^{11}$
Сталь	20 x 1,5	$2{,}111 \cdot 10^{11}$
Алюминий	10 x 2	$6{,}702 \cdot 10^{11}$
Латунь	10 x 2	$9{,}222 \cdot 10^{11}$

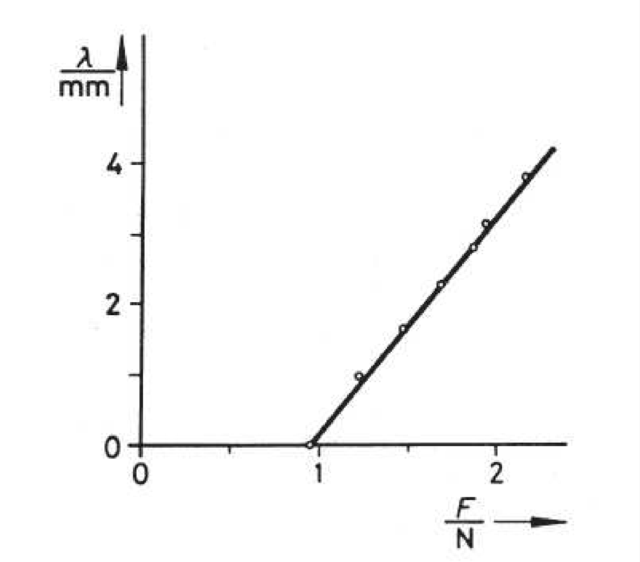

Рис. 4: Зависимость прогиба от силы (материал – сталь, L= 0,48 м, a= 10 мм, b= 1,5 мм).

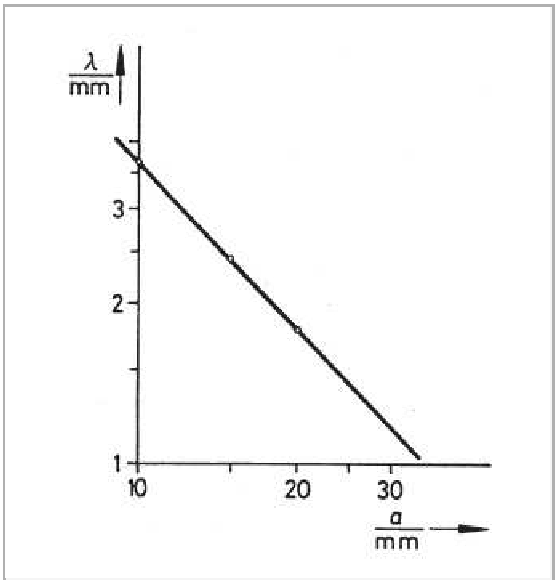

Рис. 5: Зависимость прогиба стержня от его ширины при постоянной силе (материал – сталь, толщина = 1,5 мм).

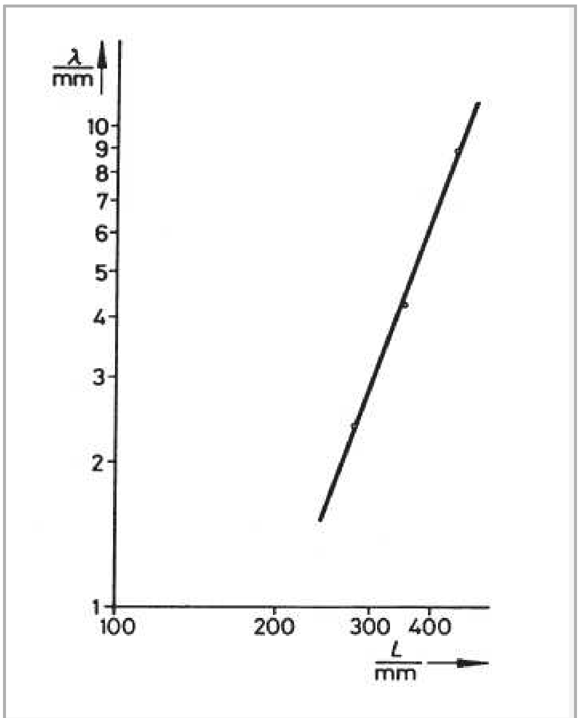

Рис. 6: Зависимость прогиба стержня от его длины при постоянной силе

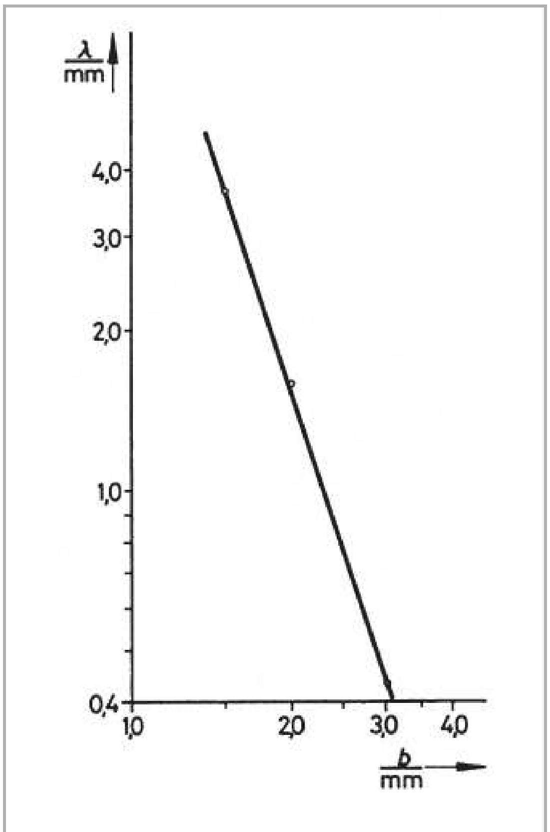

Рис. 7: Зависимость прогиба стержня от его толщины при постоянной силе (материал – сталь, ширина 10 мм).